Oraux ; Série N°3

Exercice 1 Soit $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive, et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Contre-exemple si g n'est pas positive.

Exercice 2 Une urne contient N_1 boules blanches et N_2 rouges. On tire simultanément dans l'urne n boules, avec $1 \leq n \leq N_1 + N_2$. On note X le nombre de boules blanches tirées.

1. Déterminer la loi de X, puis en déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k} = \binom{N_1+N_2}{n}$.
2. Exprimer l'espérance de X en fonction de N_1, N_2 et n.

Exercice 3 [CCP MP]

1. Soient $(u_n), (v_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.
2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{\left((-1)^n + i\right)\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}$

Exercice 4 [Mines PSI 2023] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k)$ est premier. Montrer que P est constant. **Ind** : *Commencer par le cas où* $P(0) = 2$.

Exercice 5 [Mines 2023] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. Montrer que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
2. Soient F un sous-espace vectoriel de E, G et H deux supplémentaires de F. On note p (resp. q) la projection sur F (sur H) parallèlement à G (à F). Montrer que $\operatorname{rg}(p+q) = \operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q$.

Exercice 6 [Centrale 2023]

1. Montrer que $(P,Q) \mapsto \int_0^1 PQ$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\int_0^1 x^k P(x)\,\mathrm{d}x = 1$ pour $0 \leq k \leq n-1$.
3. On pose $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0$ telle que $\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ pour $0 \leq k \leq n-1$.
   a) Montrer que $\int_0^1 f^2 \geq \sum_{i=0}^{n-1} a_i$.
   b) ★ Montrer que $\int_0^1 f^2 \geq n^2$.

Exercice 7 [ENS 2023] Soient S et T des ensembles finis non vides et $f\colon S \to T$. On pose $X = \left\{(x,y) \in S^2, f(x) = f(y)\right\}$. Montrer que $|X| \geq \max\left(\frac{|S|^2}{|T|}, \left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil^2 + |S| - \left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil\right)$.

Exercice 8 [X 2023] Soit $f \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+\right)$, strictement croissante et bijective. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Oraux ; Série N°3

Exercice 1 Soit $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive, et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Contre-exemple si g n'est pas positive.

Exercice 2 Une urne contient N_1 boules blanches et N_2 rouges. On tire simultanément dans l'urne n boules, avec $1 \leq n \leq N_1 + N_2$. On note X le nombre de boules blanches tirées.

1. Déterminer la loi de X, puis en déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k} = \binom{N_1+N_2}{n}$.
2. Exprimer l'espérance de X en fonction de N_1, N_2 et n.

Exercice 3 [CCP MP]

1. Soient $(u_n), (v_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.
2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{\left((-1)^n + i\right)\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}$

Exercice 4 [Mines PSI 2023] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k)$ est premier. Montrer que P est constant. **Ind** : *Commencer par le cas où* $P(0) = 2$.

Exercice 5 [Mines 2023] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. Montrer que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
2. Soient F un sous-espace vectoriel de E, G et H deux supplémentaires de F. On note p (resp. q) la projection sur F (sur H) parallèlement à G (à F). Montrer que $\operatorname{rg}(p+q) = \operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q$.

Exercice 6 [Centrale 2023]

1. Montrer que $(P,Q) \mapsto \int_0^1 PQ$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\int_0^1 x^k P(x)\,\mathrm{d}x = 1$ pour $0 \leq k \leq n-1$.
3. On pose $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0$ telle que $\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ pour $0 \leq k \leq n-1$.
   a) Montrer que $\int_0^1 f^2 \geq \sum_{i=0}^{n-1} a_i$.
   b) ★ Montrer que $\int_0^1 f^2 \geq n^2$.

Exercice 7 [ENS 2023] Soient S et T des ensembles finis non vides et $f\colon S \to T$. On pose $X = \left\{(x,y) \in S^2, f(x) = f(y)\right\}$. Montrer que $|X| \geq \max\left(\frac{|S|^2}{|T|}, \left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil^2 + |S| - \left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil\right)$.

Exercice 8 [X 2023] Soit $f \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+\right)$, strictement croissante et bijective. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.